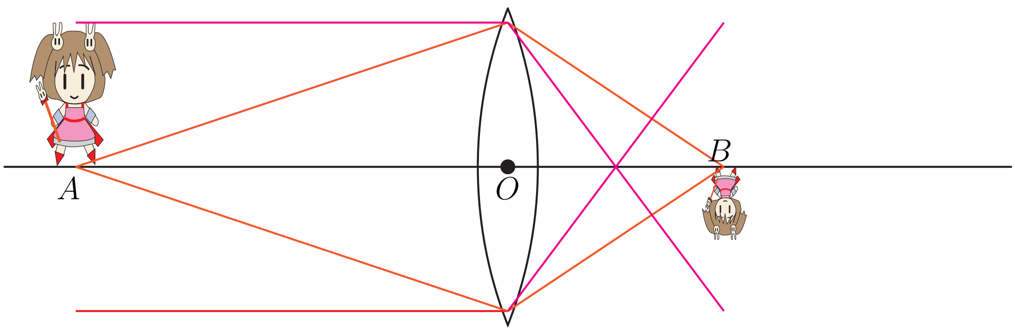
レンズの公式　図の A の位置にあるものがレンズを通して B の位置で像を結んでいるとします.



OA の長さを a, OB の長さを b, このレンズの**焦点距離**を f とすると,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

という公式が成り立ちます. これを**レンズの公式**と呼びます.

これを変形すると

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{f}-\frac{1}{b}=\frac{b-f}{fb}$$

であるので,

$$a=\frac{fb}{b-f}$$

です. この式は a,b に対して対称なので, もちろん

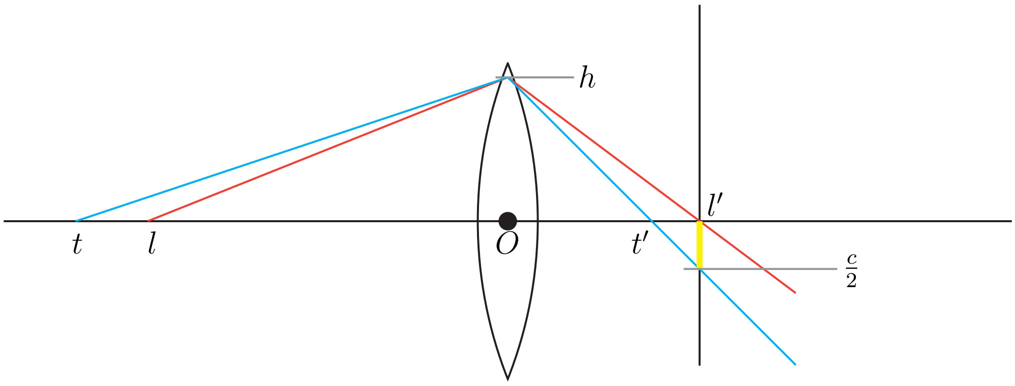
$$b=\frac{fa}{a-f}$$

でもあります.

後方被写界深度と過焦点距離　レンズの中心 O から距離 l の位置に焦点が合っているとしましょう. このときレンズと映像素子の距離 l' は上の公式から

$$l'=\frac{fl}{l-f}$$

になっています.



このとき距離が l より遠い t の位置にある物体はぼけて写ります．この距離 t にある物体がぼけずに写るときの映像素子の距離 t' は

$$t' = \frac{ft}{t-f}$$

ですが，今映像素子は l' の位置にあるため図の黄色い線の分ぼけて写ります．今このぼけの直径が c 以下であればぼけていないと見なして良いとしましょう．この c を**許容錯乱円**の直径と呼びます．許容錯乱円の大きさは鑑賞方法や見る人の主観によって異なりますが，習慣でおおよそ 0.03mm 程度ならプリントに耐えると言われています．c は直径なので，図の黄色い線の長さは $\frac{c}{2}$ です．

また，レンズの有効半径を h としておきましょう (絞ることによって変わります)．このとき**絞り値** F は，レンズの焦点距離 f とレンズの直径 $2h$ の比

$$F = \frac{f}{2h}$$

で定義されます．このとき，三角形の相似から

$$t' : h = (l' - t') : \frac{c}{2},$$

すなわち

$$\frac{c}{2}t' = h(l' - t')$$

が成立します．これに l', t' の式を代入すると

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{2}\frac{ft}{t-f} = h\left(\frac{fl}{l-f} - \frac{ft}{t-f}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{c}{2} + h\right)\frac{ft}{t-f} = h\frac{fl}{l-f} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{ft}{t-f} = \frac{h}{\frac{c}{2}+h}\frac{fl}{l-f} = \frac{2h}{c+2h}\frac{fl}{l-f}
\end{aligned}$$

が成立します．この右辺を x とすると，

$$\frac{ft}{t-f} = x \;\Leftrightarrow\; ft = x(t-f) \;\Leftrightarrow\; (f-x)t = -xf \;\Leftrightarrow\; t = \frac{-xf}{f-x}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
t = \frac{-xf}{f-x} &= \frac{-\left(\frac{2h}{c+2h}\frac{fl}{l-f}\right)f}{f - \left(\frac{2h}{c+2h}\frac{fl}{l-f}\right)} = \frac{-2hlf^2}{(c+2h)(l-f)f - 2hfl} \\
&= \frac{-2hlf^2}{clf - cf^2 + 2hlf - 2hf^2 - 2hfl} = \frac{2hlf}{2hf + c(f-l)}
\end{aligned}$$

となります．ここで $F = \frac{f}{2h}$ であるので $h = \frac{f}{2F}$ を代入すると，

$$t = \frac{\frac{f^2 l}{F}}{\frac{f^2}{F} + c(f-l)} = \frac{f^2 l}{f^2 + Fc(f-l)}$$

となります．

ここで分母が 0 になる l の値を求めます．$f^2+Fc(f-l)=0$ を l について解くと，$f^2+Fcf-Fcl=0$ であるので，

$$l=f+\frac{f^2}{Fc}$$

が求める値になります．この値を $H=f+\frac{f^2}{Fc}$ とおき，**過焦点距離**と呼びます．ピント位置 l をどんどん大きくしていって H に近づくときに t が $+\infty$ に発散，すなわち無限遠までピントがあっていると見なせることになります．

さらに c を H を用いて表すと，$\frac{f^2}{Fc}=H-f$ なので

$$c=\frac{f^2}{F(H-f)}$$

となります．これを t の式に代入すると，

$$t=\frac{f^2l}{f^2+F\frac{f^2}{F(H-f)}(f-l)}=\frac{l(H-f)}{(H-f)+(f-l)}=\frac{l(H-f)}{H-l}$$

が得られます．これが**後方被写界深度**の式です (正確には $t-l$ が後方被写界深度ですが)．

なお，過焦点距離の公式において許容錯乱円 c はたいてい非常に小さいため，$\frac{f^2}{Fc}$ は f より非常に大きい値になることが殆どです．従って過焦点距離は

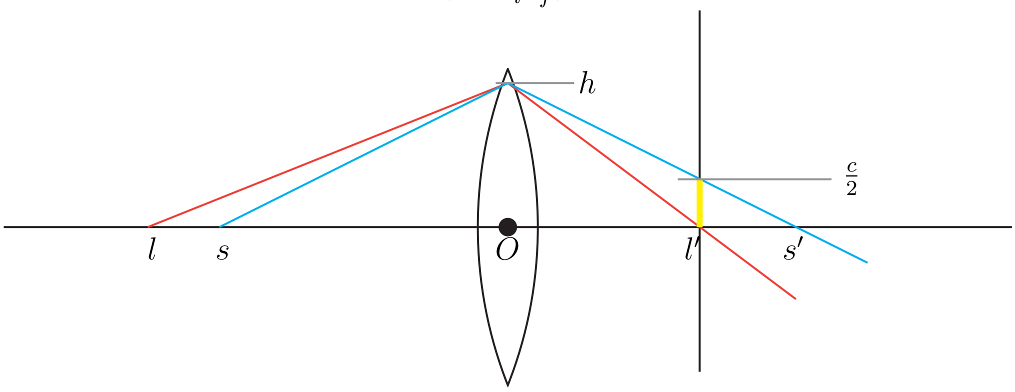
$$H\approx\frac{f^2}{Fc}$$

という近似式を用いて計算することが多いです．同様に後方被写界深度もたいてい焦点距離は過焦点距離よりも非常に小さいため，

$$t\approx\frac{lH}{H-l}$$

と近似することが多いです．

前方被写界深度　次に前方被写界深度を求めます．同じくレンズの中心 O から距離 l の位置に焦点が合っているとしましょう ($l'=\frac{fl}{l-f}$)．



ピントが合っている面より近い距離 s にある物体もやはりぼけて写ります. 本来ピントが合うときの映像素子の距離 s' は

$$s' = \frac{fs}{s-f}$$

であり, ぼけが許容錯乱円に収まる状況ではやはり三角形の相似から今度は

$$s' : h = (s' - l') : \frac{c}{2},$$

すなわち

$$h(s' - l') = \frac{c}{2}s'$$

が成立します. これに l', s' の式を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} &(h - \frac{c}{2})\frac{fs}{s-f} = h\frac{fl}{l-f} \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{fs}{s-f} = \frac{2h}{2h-c}\frac{fl}{l-f} \end{aligned}$$

を得ます. これより

$$\begin{aligned} s &= \frac{-f\left(\frac{2h}{2h-c}\frac{fl}{l-f}\right)}{f - \left(\frac{2h}{2h-c}\frac{fl}{l-f}\right)} = \frac{-2hlf^2}{f(2h-c)(l-f) - 2hfl} \\ &= \frac{2hfl}{2hf + c(l-f)} \end{aligned}$$

となります. ここで $F = \frac{f}{2h}$ を用いると,

$$s = \frac{\frac{f^2 l}{F}}{\frac{f^2}{F} + c(l-f)} = \frac{f^2 l}{f^2 + Fc(l-f)}$$

を, さらに過焦点距離 $H = f + \frac{f^2}{Fc}$ を用いると

$$s = \frac{f^2 l}{f^2 + F\frac{f^2}{F(H-f)}(l-f)} = \frac{l(H-f)}{(H-f)+(l-f)} = \frac{l(H-f)}{H+l-2f}$$

が得られます. これが**前方被写界深度**の式です (正確には $l - s$ が前方被写界深度).

この式も, H が f よりずっと大きいことを用いた近似式

$$s \approx \frac{lH}{H+l}$$

がよく用いられます. ちなみにこの近似式において, $l = H$ とする (すなわち後方被写界深度を $+\infty$ に $=$ **パンフォーカス**に設定) すると, $s = \frac{H}{2}$ となるので前方被写界深度はおおよそ過焦点距離の半分になることが分かります. つまり, おおざっぱには**パンフォーカス**に設定するときは**ピント位置を過焦点距離に合わせ**, そうすると過焦点距離の半分 $\sim$ 無限遠までピントが合った状態になります.